VI ELEKTRICKÁ VODIVOSŤ KOVOV A POLOVODIČOV

Úloha VI.1 S ohľadom na predpoklad homogénnosti máme $\nabla_r f = 0$ a Boltzmannova rovnica má tvar

$$-\frac{\varepsilon E}{\hbar}\cdot\nabla_k f = -\frac{f-f_0}{\tau} \qquad (1)$$

(náboj elektrónu je $-e$).

Elektrickú vodivosť určíme s presnosťou do prvého rádu intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{\varepsilon}$. Distribučná funkcia je $f = f_0 + f_1$, kde f_0 je rovnovážna distribučná funkcia a f_1 je funkcia prvého rádu podľa $\boldsymbol{\varepsilon}$. Značí to, že ľavá strana rovnice (1) bude prvého rádu podľa $\boldsymbol{\varepsilon}$, keď $\nabla_k f \approx \nabla_k f_0$. Riešenie rovnice (1) za tohto predpokladu má tvar

$$f(\boldsymbol{k}) = f_0(E) + \tau e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\,\frac{\partial f_0}{\partial E}. \qquad (2)$$

Uplatnili sme pritom poznatok, že

$$\nabla_k f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial E}\,\nabla_k E(\boldsymbol{k}) = \frac{\partial f_0}{\partial E}\,\hbar\boldsymbol{v}. \qquad (2a)$$

Vynásobíme obidve strany rovnice (2) výrazom $-2e\boldsymbol{v}$ a sčítame obidve strany cez všetky možné vektory $\boldsymbol{k}$ z Brillouinovej zóny. Dostaneme

$$-2e\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}f(\boldsymbol{k}) = 2e^2\sum_{\boldsymbol{k}}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)\tau\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (3)$$

Po prechode od sčítania k integrácii máme

$$-\frac{2e}{(2\pi)^3}\int\boldsymbol{v}f(\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)\tau\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}. \qquad (4)$$

Prúdovú hustotu $\boldsymbol{j}$ vypočítame takto:

$$\boldsymbol{j} = -\frac{e}{4\pi^3}\int \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \tag{5}$$

Pre zložky tenzora elektrickej vodivosti σ po porovnaní vzťahov (4) a (5) dostaneme

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)\tau v_\alpha v_\beta\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \tag{6}$$

Vo vzťahu (6) prejdeme k integrácii po povrchu konštantnej energie, teda

$$\mathrm{d}\boldsymbol{k} = (2\pi)^3 g_S\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}E\,, \tag{7}$$

kde

$$g_S = [(2\pi)^3|\nabla_{\boldsymbol{k}}E|]^{-1} \tag{7a}$$

je povrchová hustota stavov v $\boldsymbol{k}$-priestore na ploche konštantnej energie. Uvedomíme si, že $\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)$ má charakter Diracovej δ-funkcie. Zložky tenzora elektrickej vodivosti $\sigma_{\alpha\beta}$ môžeme preto vyjadriť v tvare

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2e^2\int_{(F)}\tau v_\alpha v_\beta g_S\,\mathrm{d}S\,, \tag{8}$$

kde sa integruje po Fermiho ploche (t. j. ploche s energiou E_F) v k priestore.

Pre guľovú Fermiho plochu a izotropný relaxačný čas tenzor elektrickej vodivosti má nenulové, len diagonálne elementy

$$\sigma = 2e^2\tau(E_F)\,\frac{v_F^2}{3}\,g(E_F)\,. \tag{9}$$

Pre disperzný vzťah $E(\boldsymbol{k}) = \hbar^2k^2/2m$ platí

$$g(E) = \frac{(2m^*)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\,E^{1/2}\,. \tag{10}$$

V prípade silnej degenerácie $\left(\frac{E_F}{k_0T} \gg 1\right)$ pre koncentráciu elektrónov n dostaneme

$$n = 2\int_0^\infty g(E)f_0(E)\,\mathrm{d}E = 2\int_0^\infty f_0(E)\,\mathrm{d}\varphi(E) = -2\varphi(0) + 2\int_0^\infty \varphi(E)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)\mathrm{d}E\,. \tag{11}$$

Urobili sme transformáciu $g(E)\,\mathrm{d}E = \mathrm{d}\varphi(E)$ a uvedomili sme si, že $f_0(\infty)\to 0$, $f_0(0)\to 1$. V našom prípade, t. j. v prípade kvadratického disperzného vzťahu

$$\varphi(E) = \frac{2}{3}\,Eg(E) = \frac{1}{3}\,m^*v^2g(E)\,, \tag{12}$$

t. j. $\varphi(0)\to 0$.

Potom pre koncentráciu elektrónov máme

$$n = 2\int_0^\infty \varphi(E)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)\mathrm{d}E = 2\varphi(E_F) = \frac{2}{3}\, m^* v_F^2 g(E_F), \tag{13}$$

kde v_F je rýchlosť elektrónu s energiou E_F.

Zo vzťahov (9) a (13) dostaneme

$$\sigma = \frac{ne^2\tau(E_F)}{m^*}. \tag{14}$$

Úloha VI.2 Elektrón pod vplyvom homogénneho poľa ε sa pohybuje so zrýchlením $-e\varepsilon/m^*$. Stredná hodnota rýchlosti elektrónov pred pôsobením poľa ε bola nulová. Elektrické pole zvyšuje strednú hodnotu rýchlosti elektrónov, keď každý z nich za čas τ získa rýchlosť $-e\tau\varepsilon/m^*$. Keďže každý elektrón je rozptýlený v inom časovom okamihu, stredná hodnota rýchlosti elektrónov $\langle v\rangle$ za čas τ bude

$$\langle v\rangle = -\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{e\varepsilon t}{m^*}\,\mathrm{d}t = -\frac{e\varepsilon\tau}{2}. \tag{1}$$

Pre hustotu elektrického prúdu dostaneme

$$j = -en\langle v\rangle = \frac{ne^2}{2m^*}\,\tau\varepsilon, \tag{2}$$

kde n je koncentrácia elektrónov.

Elektrická vodivosť bude vyjadrená v tvare

$$\sigma = \frac{ne^2}{2m^*}\,\tau. \tag{3}$$

Keď predpokladáme, že relaxačný čas pre rozličné elektróny je rôzny, potom pri časovom stredovaní musíme poznať pravdepodobnosť, že v časovom intervale $(t, t+\mathrm{d}t)$ elektrón nebude rozptýlený. Označme τ strednú hodnotu relaxačného času. Z definície relaxačného času — „elektrón za čas τ nie je rozptýlený“ — vyplýva, že pre pravdepodobnosť toho, že elektrón v časovom intervale $(t, t+\mathrm{d}t)$ bude rozptýlený, bude vyjadrenie $\mathrm{d}t/\tau$. Pravdepodobnosť $P(t)\,\mathrm{d}t$, teda toho, že v intervale $(0, t+\mathrm{d}t)$ nedošlo k rozptylu, je určená vzťahom

$$P(t+\mathrm{d}t) = P(t)\left(1-\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right),$$

t. j.

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{P(t)}{\tau}, \quad P(t) = \frac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}. \tag{4}$$